数理解析研究所講究録
70巻 1969年 81-88

非灰色の対流層モデル について

東大 理　　海野 和三郎

§1　表現

輻射流体の記述を前の研究会に述べた一般変分原理に基づいて行う。これは一般化されたエントロピー生成の最小を原理とするが，直接的には保存則を次の形に積分形にまとめることである。

$$0 = \delta\Phi \equiv \int dx\,dy\,dz \left[\frac{\delta P}{\rho} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right\} + \delta u_i \left\{ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g_i \right\} + \delta \ln T \left\{ \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho T u_j \frac{\partial S}{\partial x_j} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right\} \right] \tag{1}$$

P：圧力，ρ：密度，T：温度，u_i：速度，g_i：重力加速度（$g_i = -g\,\delta_{i3}$）

S：エントロピー，F_i：輻射流量

目的は水平平均をとったモデルの決定であるが，対流の決定が同時に必要となる。両者を分離してその関連を調べる。水平平均をバーで記し，$P = \overline{P}(1+\varpi)$，$\rho = \overline{\rho}(1-\eta)$，$T = \overline{T}(1+\theta)$，$S = \overline{S} + S_1$，$u_i = \overline{u}_i + u_{1i}$，$F_i = \overline{F}_i + F_{1i}$

$\rho u_i = \overline{\rho u_i} + (\rho u_i)_1$, $\rho u_i u_j = \overline{\rho u_i u_j} + (\rho u_i u_j)_1$ 等と書く。(1)の水平平均は若干の計算により，

$$\delta\overline{\Phi} = \int dx\,dy\,dz \Big[\delta\overline{\varpi} \Big\{ \frac{\partial}{\partial z}(\overline{P} + \overline{\rho w^2}) + g\overline{\rho} \Big\} + \delta(\ln\overline{T}) \frac{\partial}{\partial z} \Big\{ \overline{\Big(W + \frac{u_j^2}{2}\Big)_1 \rho w} + \overline{F} \Big\} \Big] = 0, \tag{2}$$

但し，同時に水平(xy-)面における対称性をも考慮して，

$$\overline{\rho u_i} = 0, \quad (\overline{u}_i = -\overline{\eta u_i} \ll |u_i|). \tag{3}$$

W: エンタルピー， $w \equiv u_3$ 　(2)は平均モデルの構造をきめる。対流圧 $\overline{\rho w^2}$，対流熱流量 $\overline{(W + u_j^2/2)_1 \rho w}$ を通じて対流が関与し，$\overline{F}$ を通じて非灰色輻射輸送が問題となる。対流を決定する式は(1)と(2)の差である。ρu_i は小さくなくてよいが，ϖ, η, θ を一次の量とすると

$$\delta\Phi_c = \int dx\,dy\,dz \Big[\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}} \delta\varpi \Big\{ \overline{\rho}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \Big\} + \delta u_i \Big\{ \overline{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \Big(\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)_1 + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{P}\varpi) - g_i \overline{\rho}\eta \Big\} + \delta\theta \Big\{ \overline{\rho}\,\overline{T}\frac{\partial S_1}{\partial t} + \rho w \frac{\partial \overline{S}}{\partial z} + \Big(\rho u_j \frac{\partial S_1}{\partial x_j}\Big)_1 - \theta\frac{\partial \overline{F}}{\partial z} + \frac{\partial F_{1j}}{\partial x_j} \Big\} \Big] = 0. \tag{4}$$

対流の決定には勿論モデル(バーの量)が知られている必要があるが，問題は2つの非線型項 $\left(\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_1$ と $\left(\rho u_j \frac{\partial S_1}{\partial x_j}\right)_1$ 及び非灰色輻射流出 $\frac{\partial F_{1j}}{\partial x_j}$ の取扱いである。その外，現行の混合距離理論との違いとしては安定層への対流のつきぬけがあるが，これは(4)の非局所性を考慮すれば自然に入る。問題点を次の2節で論ずる。

§2 非線型項

圧縮性不均質流体の乱流理論に完全なものがない以上，非線型項の取扱いには本質的困難がある。速度場温度場をフーリエ分解し，ハイゼンベルク理論などを用いて乱流のスペクトル理論を展開することも可能であるが，モデル計算の上に実際的ではない。こゝでは対流の代表的渦要素のみを取扱い，しかも1つの要素内の物理量の変動の間の位相関係は非圧縮性層流対流におけると同様であると仮定する近似を用いる。

したがつて，ρu_i の分散，渦要素の代表的波数，有効レイノルズ数，有効ペクレ数を $\langle \rho u_i \rangle$，k_i，Re，Pe とかけば，非線型項は次の様に表わされるものとする。(二回以上の指標は和)

$$\left(\rho u_j \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j}\right)_1 = -\frac{1}{Re} \langle \rho u_j \rangle \frac{1}{k_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_{1i} \qquad (5)$$

$$\left(\rho u_j \frac{\partial S_1}{\partial x_j}\right)_1 = -\frac{1}{Pe} \langle \rho u_j \rangle \frac{1}{k_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} S_1 . \qquad (6)$$

Re は実験的及び理論的に推定され約10である。Pe はよくわからないが，渦度の輸送とエントロピー輸送と同じ係数をもつものとすれば Re と同じとしてよいであろう。実際は運動エネルギースペクトルとエントロピースペクトルと一般的には同一でない影響があると考えられるが，その差は僅かである。(5)(6)のように置くことが許されれば，変動量の分散については非線型であるが，位相については線型であるので，本質的困難はなくなる。

——

3.3 非灰色輻射流出

対流渦の輻射流出について吸収係数が振動数による非灰色性が考慮されたことがない。この効果は巨星の対流層において場合によっては非線型項をきちんと扱うこと以上に重要であろう。

輻射場をエディントン近似で記述すると，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F}_\nu = -4\pi\varkappa_\nu\rho\,(J_\nu - B_\nu) \tag{7}$$

$$\mathrm{grad}\,J_\nu = -\frac{3}{4\pi}\varkappa_\nu^{+}\rho\,\mathbf{F}_\nu \tag{8}$$

ν：振動数，$\mathbf{F}_\nu$：輻射流量，J_ν：平均強度，B_ν：プランク関数，

$\varkappa_\nu$：吸収係数，$\varkappa_\nu^{+}$：吸収係数＋散乱係数

水平平均からのずれについての一次までの式をつくり，$J_{\nu 1}$ を消去すれば，（バーを消略）

$$\mathbf{F}_{\nu 1} - \frac{1}{3\varkappa_\nu^{+}\rho}\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\varkappa_\nu\rho}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}_{\nu 1}\right) = -\left(\frac{\varkappa_{\nu 1}^{+}}{\varkappa_\nu^{+}}+\eta\right)\mathbf{F}_\nu - \frac{1}{3\varkappa_\nu^{+}\rho}\,\mathrm{grad}\cdot\left[4\pi B_{\nu 1} + \frac{1}{\varkappa_\nu\rho}\left(\frac{\varkappa_{\nu 1}}{\varkappa_\nu}+\eta\right)\mathrm{div}\,\mathbf{F}_\nu\right] \tag{9}$$

渦要素が光学的に薄い場合はこの式は

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F}_{\nu 1}^{(thin)} = 4\pi\varkappa_\nu\rho B_{\nu 1} + \left(\frac{\varkappa_{\nu 1}}{\varkappa_\nu}+\eta\right)\mathrm{div}\,\mathbf{F}_\nu\,. \tag{10}$$

積分（ν について）して

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F}_1^{(thin)} = 16\pi\varkappa\rho B\theta + \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}+\eta\right)\frac{\partial F}{\partial z}\,, \tag{11}$$

$$\varkappa = \int \varkappa_\nu \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\Big/\frac{\partial B}{\partial T}\right)d\nu\,, \quad \frac{\varkappa_1}{\varkappa} = \int \frac{\varkappa_{\nu 1}}{\varkappa_\nu}\left(\frac{\partial F_\nu}{\partial z}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\right)d\nu\,. \tag{12}$$

光学的に厚い場合は

$$\mathbf{F}_1^{(thick)} = -\frac{16\pi B}{3\varkappa^{+}\rho}\,\mathrm{grad}\,\theta - \left(\frac{\varkappa_1^{+}}{\varkappa^{+}}+\eta-4\theta\right)\mathbf{F}\,, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\kappa^{+}} \approx \int \frac{1}{\kappa_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\Big/\frac{\partial B}{\partial T}\right)d\nu \,, \qquad \frac{1}{\kappa^{+}} = \int \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{F_\nu}{F}d\nu \,. \qquad (14)$$

(4)の最後の項が必要であるが，これには上の2つの場合の内挿を(9)の構造を参考にして行い

$$\int \delta\theta \,\mathrm{div}\,\mathbf{F}_1 \,dx\,dy\,dz = \int \left[(1-D)\delta\theta\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}_1^{(thin)} - D\,\mathrm{grad}\,\delta\theta\cdot\mathbf{F}_1^{(thick)}\right]dx\,dy\,dz \,, \qquad (15)$$

$$D = 3\tau_c\tau_c^{+}\big/\left(1+3\tau_c\tau_c^{+}\right) \,, \qquad \tau_c = \kappa\rho/k \,, \quad \tau_c^{+} = \kappa^{+}\rho/k \qquad (16)$$

恒星の対流に対しては一般に(15)は充分な精度をもつと考えられる。

(15)のような取扱いは非灰色モデルを逐次近似で数値的に計算する場合にも用いられる。この場合は θ，$\mathbf{F}_1$ は前の近似の誤差 $\Delta\theta$，$\Delta\mathbf{F}$ を意味することになるが，これ以外に境界条件からくる附加項がついてくる点がことなるだけで，ほゞ同じ形式となる。

§4　乱対流の性質

(2)において，乱対流による圧力及びエネルギー流量が平均の大気構造をきめる要素となっていることが示された。前者はガス圧に対する補正となるにすぎないが，後者は活発な対流層では輻射流量を遥かにしのぐので本質的役割をする。対流エネルギー流量の主要項は $\overline{W_i\rho w} \approx c_pT\overline{\rho w\theta}$ である。主要渦に対して非圧縮性層流対流における如く，θ と ρw との位相関係を等しいとする近似を用いれば，これは $c_pT\langle\rho w\rangle\langle\theta\rangle$

(< >は平均) となるので，(4)によって与えられる気候値の性質として$\langle \rho w \rangle$と$\langle \theta \rangle$とを求めることが課題となる。

大気が定常の場合には以上の見地からすると(4)の時間微分を含む項はすべて不要となる。これらの項の和は熱力学の関係式を用いて $\int dxdydz\, C_i(P,T)\, \delta X_i \frac{\partial X_i}{\partial t}$ の形に書けるので，δとして時間変化に関連する変分をとらない限り（変化量の間の位相関係を調べるのでない限り）$\int dxdydz\, C_i(P,T) \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\delta X_i \cdot X_i)}$ となり，定常の仮定により消えてしまうからである。したがつて問題は定常対流と本質的に同じ取扱いとなる。

(5)(6)(15)を(4)に代入し，状態方程式などによりηとS_1をϖ, θで表わせば，(4)は形式的に次の形となる；

$$\delta \Phi_c = \int dxdydz\, \delta X_i\, J_i(X_j\,;\, P, T) = 0 \tag{17}$$

但し，X_iは$\varpi, \theta, \rho u, \rho v, \rho w$ を表わし，J_iはx, y, zによる微分などを含んだ汎関数であるが，特に$\langle X_j \rangle$については二次までを含む。δX_i は$\langle X_i \rangle$及び波数k_jに対する任意変分を独立にとつたものを表わし，(17)により変分パラメタにとつた$\langle X_i \rangle$及びk_jはすべて決定する。

大気を有限の層に分割し，各境界面における$\langle X_i \rangle$, k_jを変分パラメタとすれば（中間は折線でつなぐものとする），(17)は多変数連立代数方程式を与える。これを解けば$\langle \rho w \rangle$, $\langle \theta \rangle$がzの関数として求まる。

結局〈X〉のz-依存性を無視すれば局所的な理論となり，この場合(17)から得られるものは従来の混合距離理論となる。

また，$\langle X_i \rangle$のz-依存性を$\langle X_i \rangle_0 \alpha_i(z)$のように表わし$\delta \langle X_i \rangle_0$の変分を考えると一般的性質が議論できる。その結果，対流渦の代表的大きさは密度がe倍となる高さ(スケール・ハイト)程度になることなどが示される。

対流の非局所が考慮できることは特に赤色巨星の表面の安定層への対流のつきぬけが扱える点で重要であると考えられる。スペクトル分析と比較すべきモデル及び内部構造の表面条件などをきめる上に影響があるであろう。

§5　モデル計算法

実際にモデルを計算する場合には，平均モデルを与えるのに対流が入り，対流をきめるのに平均モデルが必要なので，荒いモデルから出発して逐次近似をしなければならない。基本式は(2)と(17)であるが，変数を$Y_i = Y_i^{(0)} + \Delta Y_i$のようにとつて(2)と(17)を$\delta(\Delta Y_i)$の式に変型する。但し$Y_i$は$\overline{P}, \overline{T}, \langle\omega^2\rangle, \langle\theta^2\rangle, \langle\theta u_j\rangle$などである。更に前節で述べたように有限層に分割し，境界でのΔY_iを変分パラメタとして，連立代数方程式を導き，これを計算機で解くことになる。その扱いはヘニエ法と大同小異となる。